УДК 517

Е. А. Зёрнышкина

НЕРАВЕНСТВА ШМИДТА МЕЖДУ НОРМАМИ ФУНКЦИИ И ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ СРЕЗКИ ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ*

1. Введение

Пусть $L^p = L^p(-\pi,\pi)$, $0<p<\infty$, есть пространство измеримых функций y с суммируемой степенью $|y|^p$ на интервале $(-\pi,\pi)$, $L^\infty = L^\infty(-\pi,\pi)$ – пространство измеримых существенно ограниченных на $(-\pi,\pi)$ функций, а $L^0 = L^0(-\pi,\pi)$ – пространство измеримых функций, у которых суммируема функция $\ln_+|y| = \ln(\max(1,|y|))$. На этих пространствах рассмотрим функционалы

$$||y||_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|y(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\quad 0<p<\infty,$$

$$||y||_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(-\pi,\pi)}|y(x)|,$$

$$||y||_{L^0} = \lim_{p\to+0}||y||_{L^p} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|y(x)|\,dx\right).$$

Если для $y\in L^0$ функция $\ln|y|$ не является суммируемой, а точнее (неположительная) функция $\ln_-|y| = \ln(\min(1,|y|))$ не является суммируемой (например, y обращается в нуль на множестве положительной меры), то в этом случае полагаем $||y||_{L^0}=0$.

Обозначим через $W^q = W(q)$ пространство абсолютно-непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций y, удовлетворяющих условию $y'\in L^q(-\pi,\pi)$, а через $W^q_+ = W_+(q)$ – множество абсолютно-непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций y, для которых $y'_+ = \max\{0,y'\}\in L^q(-\pi,\pi)$.

Пусть $Q^1 = Q^1(q)$ – класс 2π-периодических функций y, абсолютно непрерывных на всей числовой оси, сужение которых на отрезок $[-\pi,\pi]$ принадлежит пространству W^q и для которых выполняется свойство

$$\max y + \min y = 0, \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00233) и Программы Государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект № НШ-5120.2006.1).

и $Q^2 = Q^2(q)$ – подобный же класс функций, у которых вместо (1) выполняется свойство

$$\exists\, x_0 \in [-\pi, \pi] \quad y(x_0) = 0. \tag{2}$$

Аналогичные классы 2π-периодических функций $y \in W^q_+$, обладающих свойством (1) или (2), обозначим через Q^1_+ и Q^2_+ соответственно.

Пусть $K_{p,q}(Q^j)$ – точная (т. е. наименьшая) константа в неравенстве

$$\begin{gathered} ||y||_{L^p} \leqslant K_{p,q}(Q^j)||y'||_{L^q}, \quad y \in Q^j, \\ 0 \leqslant p \leqslant \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty,\ j = 1, 2. \end{gathered} \tag{3}$$

Ясно, что

$$K_{p,q}(Q^j) = \sup\left\{\Phi(y):\ y \in Q^j,\ y \not\equiv 0\right\}, \quad j = 1, 2, \tag{4}$$

где функционал Φ определяется формулой

$$\Phi(y) = \frac{||y||_{L^p}}{||y'||_{L^q}}.$$

Неравенствам вида (3) на различных классах функций посвящены работы многих авторов – В. Виртингера, Г. Бора, Г. Харди, Д. Е. Литтльвуда, Б. Секефальви-Надя, Д. Фавара, Н. И. Ахиезера, В. И. Левина, С. Б. Стечкина и др. (см. [2]).

Неравенство (3) на классах Q^1, Q^2 (и некоторых других близких классах) изучал Э. Шмидт [1]. Он доказал, что при $0 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, неравенство (3) на классе Q^1 справедливо с точной константой

$$\begin{gathered} K_{p,q}(Q^1) = \tfrac{\pi}{2} H\left(\tfrac{1}{p}, \tfrac{q-1}{q}\right), \quad p \neq 0; \\ K_{0,q}(Q^1) = \lim_{p\to+0} K_{p,q}(Q^1) = \tfrac{\pi}{2}\left(G\left(\tfrac{q-1}{q}\right)\right)^{-1}, \end{gathered} \tag{5}$$

где функции $H(u,v)$ и $G(u)$ определяются равенствами

$$G(u) = \left(\frac{e}{u}\right)^u \Gamma(1+u), \quad G(0) = 1; \quad H(u,v) = \frac{G(u+v)}{G(u)G(v)}.$$

Функция $G(u)$ непрерывна для всех неотрицательных значений u. На классе Q^2, $0 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, точная константа в неравенстве (3) определяется соотношением

$$K_{p,q}(Q^2) = 2K_{p,q}(Q^1).$$

Как показал Шмидт [1], при $q \neq 1$ экстремальные функции неравенства (3) (на которых это неравенство обращается в равенство или, что то же самое, достигается верхняя грань в (4)) имеют вид $y(x) = c_1 Y_{p,q}(x+c_2)$ – в случае Q^1 и $y(x) = c_1 \left|Y_{p,q}\left(\frac{x}{2}+c_2\right)\right|$ – в случае Q^2, где c_1, c_2 – произвольные константы, а функция $Y_{p,q}$ определена следующим образом. При $p=\infty$, $q \neq 1$ функция $Y_{p,q}$ является 2π-периодической кусочно-линейной с вершинами на $[-\pi,\pi]$ в точках $(\pm\pi, 0)$, $\left(\pm\frac{\pi}{2}, \pm 1\right)$. При $0 < p < \infty$, $q \neq 1$ функция $Y_{p,q}$ является решением дифференциального уравнения

$$|Y_{p,q}|^p + \lambda^q |Y'_{p,q}|^q = 1 \tag{6}$$

и при $p = 0$, $q \neq 1$ – дифференциального уравнения

$$\ln|Y_{0,q}| + \lambda^q |Y'_{0,q}|^q = 0, \tag{7}$$

где

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 \eta^{\frac{1}{1-q}}\, d\xi\right)^{-1},$$

а $\xi \in [-1,1]$ и $\eta \geqslant 0$ связаны соотношениями

$$|\xi|^p + |\eta|^{\frac{q}{q-1}} = 1, \quad p \neq 0; \qquad \ln|\xi| + |\eta|^{\frac{q}{q-1}} = 0, \quad p = 0.$$

Функция $Y_{p,q}$ обращается в нуль и достигает экстремальных значений, равных ± 1, в тех же точках, что и $\sin x$. Она также обладает теми же свойствами симметрии, что и $\sin x$, кроме того, для всех значений $x \in [-\pi,\pi]$ знак функции $Y_{p,q}$ совпадает со знаком функции $\sin x$. Производная этой функции обладает свойствами симметрии, обращается в нуль и достигает экстремумов в тех же точках, что и $\cos x$, знак производной совпадает для всех $x \in [-\pi,\pi]$ со знаком $\cos x$.

В случае $q = 1$ неравенство (3) строгое: не существует функции из соответствующего класса Q^j, $j = 1, 2$, на которой неравенство обращается в равенство. Точность констант $K_{p,1}(Q^1) = \frac{\pi}{2}$ и $K_{p,1}(Q^2) = \pi$ можно показать, рассмотрев при $n \to \infty$ последовательность 2π-периодических кусочно-линейных функций с вершинами на $[-\pi,\pi]$ в точках $(\pm 1/n, \pm 1)$, $(\pm\pi \mp 1/n, \pm 1)$, $(\pm\pi, 0)$ для случая $j = 1$ и в точках $(\pm\pi \mp 1/n, 1)$, $(\pm\pi, 0)$ для случая $j = 2$.

В настоящей работе изучается точное неравенство

$$\begin{gathered} ||y||_{L^p} \leqslant K_{p,q}(Q^j_+)||y'_+||_{L^q}, \quad y \in Q^j_+, \\ 0 \leqslant p \leqslant \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty, \quad j = 1, 2, \end{gathered} \tag{8}$$

или, что то же самое, задача о нахождении точной верхней грани

$$K_{p,q}(Q^j_+) = \sup\left\{\Phi_+(y):\ y \in Q^j_+,\ y \not\equiv 0\right\},$$

на классах Q^j_+ функционала Φ_+, определяемого формулой

$$\Phi_+(y) = \frac{||y||_{L^p}}{||y'_+||_{L^q}}.$$

Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. *При всех* $0 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *справедливо равенство*

$$K_{p,q}(Q^j_+) = 2K_{p,q}(Q^j), \quad j = 1, 2.$$

При этом экстремальной функции в классе Q^j_+ не существует, однако можно построить экстремальную последовательность, сглаживая соответствующим образом функцию $Y_{p,q;j}$, определенную для $x \in [-\pi, \pi]$ соотношениями

$$Y_{p,q;j}(x) = \begin{cases} Y_{p,q}\left(\frac{x}{2}\right), & j = 1, \\ Y_{p,q}\left(\frac{x+\pi}{4}\right), & j = 2. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы 1 сначала будет найдена точная константа в неравенстве вида (8) на классе неубывающих на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций (теорема 2), далее получена оценка снизу для констант $K_{p,q}(Q^1_+)$ и $K_{p,q}(Q^2_+)$ (лемма 1) и в последней части найдены эти константы.

2. Неравенство Шмидта для монотонных функций

Пусть $V = V^q \subset W^q$ – класс неубывающих на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, обладающих свойством (1). Для любой функции из этого класса имеем $y'_+ = y'$. Положим

$$K_{p,q}(V) = \sup\left\{\Phi_+(y):\ y \in V,\ \ y \not\equiv 0\right\}.$$

Теорема 2. *При всех* $0 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *справедливо равенство*

$$K_{p,q}(V) = 2K_{p,q}(Q^1). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть y – произвольная функция из класса V, $y \not\equiv 0$. В силу свойства (1), функция y на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеет нуль, который обозначим x_0. Рассмотрим функцию $\widetilde{y}$, определенную на отрезке $[-2\pi - x_0, 2\pi - x_0]$ следующим образом:

$$\widetilde{y}(x) = \begin{cases} y(-2\pi - x), & x \in [-2\pi - x_0, -\pi], \\ y(x), & x \in [-\pi, \pi], \\ y(2\pi - x), & x \in [\pi, 2\pi - x_0]. \end{cases}$$

Функция $g(x) = \widetilde{y}(2x - x_0)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, на концах отрезка обращается в нуль и удовлетворяет свойству (1). Кроме того, $g' \in L^q(-\pi, \pi)$. Значит, функция g принадлежит классу Q^1. Следовательно, для нее справедливо неравенство (3):

$$||g||_{L^p} \leqslant K_{p,q}(Q^1)||g'||_{L^q}.$$

Нетрудно видеть, что $||g||_{L^p} = ||y||_{L^p}$ и $||g'||_{L^q} = 2||y'_+||_{L^q}$. Таким образом, для любой функции $y \in V$ выполняется неравенство

$$\Phi_+(y) \leqslant 2K_{p,q}(Q^1).$$

С другой стороны, при $q \neq 1$, учитывая свойства экстремальной функции $Y_{p,q}$ в неравенстве (3), нетрудно проверить, что для $Y(x) = Y_{p,q}(\frac{x}{2}) \in V$, $x \in [-\pi, \pi]$, выполняется равенство $\Phi_+(Y) = 2K_{p,q}(Q^1)$. Тем самым равенство (9) при $q > 1$ проверено.

При $q = 1$ для последовательности кусочно-линейных функций $Y_n \in V$ с вершинами в точках $(\pm 1/n, \pm 1), (\pm\pi, \pm 1)$ получаем

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_+(Y_n) = \pi = 2K_{p,1}(Q^1).$$

Теорема 2 доказана.

3. Оценка снизу для констант $K_{p,q}(Q^j_+)$.

Лемма 1. *При всех $0 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $j = 1, 2$ справедливо неравенство*

$$K_{p,q}(Q^j_+) \geqslant 2K_{p,q}(Q^j). \tag{10}$$

Доказательство. При $q = 1$ для последовательности 2π-периодических кусочно-линейных функций Y_n с вершинами на отрезке $[-\pi, \pi]$ в точках $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 1/n, \pm 1)$, $(\pm\pi \mp 1/n, \pm 1)$ для случая $j = 1$ и в точках $(\pm\pi \mp 1/n, 1), (\pm\pi, 0)$ для случая $j = 2$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_+(Y_n) = 2K_{p,1}(Q^j) = \begin{cases} \pi, & j = 1, \\ 2\pi, & j = 2. \end{cases}$$

Пусть теперь $q \neq 1$. Обозначим $T_n = \pi + \frac{1}{n}$ и рассмотрим последовательность $2T_n$-периодических функций, определенных на периоде следующим образом:

$$y_n(x) = \begin{cases} -n(x + T_n), & x \in [-T_n, -\pi], \\ Y_{p,q}\left(\frac{x}{2}\right), & x \in [-\pi, \pi], \\ -n(x - T_n), & x \in [\pi, T_n]. \end{cases}$$

Здесь $Y_{p,q}$ – функция, экстремальная в соответствующем неравенстве (3) на классе $Q^1(q)$, $q \neq 1$. Функция y_n непрерывна и монотонно возрастает на отрезке $[-\pi, \pi]$, что следует из свойств функции $Y_{p,q}$.

Функция $g_n(x) = y_n\left(\frac{T_n x}{\pi}\right)$ является 2π-периодической абсолютно непрерывной функцией, удовлетворяющей условию (1). Нетрудно проверить равенства

$$||g_n||_{L^\infty} = ||Y_{p,q}||_{L^\infty},$$

$$||(g_n')_+||_{L^\infty} = \frac{T_n}{2\pi}||Y_{p,q}'||_{L^\infty},$$

$$||(g_n')_+||_{L^q} = \frac{1}{2}\left(\frac{T_n}{\pi}\right)^{1-1/q}||Y_{p,q}'||_{L^q}, \quad q \neq \infty.$$

Кроме того, при $0 < p < \infty$

$$||g_n||_{L^p}^p - \frac{\pi}{T_n}||Y_{p,q}||_{L^p}^p = \frac{1}{T_n}\int_\pi^{T_n} |-n(x-T_n)|^p\,dx = \frac{1}{nT_n(p+1)},$$

при $p = 0$

$$\ln||g_n||_{L^0} - \frac{\pi}{T_n}\ln||Y_{p,q}||_{L^0} = -\frac{1}{nT_n},$$

$$||g_n||_{L^0} = (||Y_{p,q}||_{L^0})^{\frac{\pi}{T_n}}\, e^{-\frac{1}{nT_n}}.$$

В итоге получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}||g_n||_{L^p} = ||Y_{p,q}||_{L^p}, \quad 0 \leqslant p \leqslant \psi\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}||(g_n')_+||_{L^q} = \frac{1}{2}||Y_{p,q}'||_{L^q}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty.$$

Переходя в неравенстве $K_{p,q}(Q_+^1) \geqslant \Phi_+(g_n)$ к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$K_{p,q}(Q_+^1) \geqslant 2\Phi(Y_{p,q}) = 2K_{p,q}(Q^1).$$

Пусть теперь $h_n(x) = g_n\left(\frac{x+\pi}{2}\right) = y_n\left(\frac{T_n(x+\pi)}{2\pi}\right)$, где y_n определена выше. Функция h_n является 2π-периодической абсолютно непрерывной, удовлетворяющей условию (2), т. е. $h_n \in Q_+^2$. Тогда

$$K_{p,q}(Q_+^2) \geqslant \Phi_+(h_n) = 2\Phi_+(g_n).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство

$$K_{p,q}(Q_+^2) \geqslant 4\Phi(Y_{p,q}) = 4K_{p,q}(Q^1) = 2K_{p,q}(Q^2).$$

Лемма доказана.

4. Доказательство основной теоремы

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. *Для любой функции* $y \in Q^1_+(q)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, *произвольных* p, $0 < p \leqslant \infty$, *и* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $P \in Q^1_+(q)$, *сужение которой на отрезок* $[-\pi, \pi]$ *является многочленом, и для которой выполняется неравенство*

$$|\Phi_+(y) - \Phi_+(P)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Так как функция y абсолютно непрерывна, то y' суммируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда для произвольного $\delta > 0$ существует $N > 0$, при котором верно неравенство

$$||y' - y'_N||_{L^1} < \frac{\delta}{2},$$

где $y'_N(x) = \max\{y'(x), -N\}$. Функция $y'_N(x)$ принадлежит $L^q(-\pi, \pi)$, так как $y'_N(x) = y'_+ + (y'_N - y'_+)$, где $y'_+ \in L^q(-\pi, \pi)$ и функция $y'_N - y'_+$ ограничена. По теореме Вейерштрасса, примененной к функции y'_N, на отрезке $[-\pi, \pi]$, существует многочлен φ такой, что

$$||y'_N - \varphi||_{L^q} < \frac{\delta}{4}.$$

Определим многочлен, который обозначим g', следующим образом:

$$g'(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx.$$

С учетом того что среднее значение на $[-\pi, \pi]$ функции y' как производной периодической функции равно нулю, из неравенства

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - g'(x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x) - y'_N(x)|\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |y'_N(x) - y'(x)|\, dx \leqslant \\ &\leqslant ||y'_N - \varphi||_{L^q} + ||y' - y'_N||_{L^1} < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \frac{3\delta}{4} \end{aligned}$$

получаем

$$||y'_N - g'||_{L^q} \leqslant ||y'_N - \varphi||_{L^q} + ||\varphi - g'||_{L^q} < \frac{\delta}{4} + \frac{3\delta}{4} = \delta.$$

С учетом равенства $y'_+ = (y'_N)_+$ имеем

$$|y'_+ - g'_+| = |(y'_N)_+ - g'_+| = \left|\frac{|y'_N| + y'_N}{2} - \frac{|g'| + g'}{2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{|y'_N| - |g'|}{2}\right| + \left|\frac{y'_N - g'}{2}\right| \leqslant |y'_N - g'|$$

и, следовательно,

$$\|y'_+ - g'_+\|_{L^q} \leqslant \|y'_N - g'\|_{L^q} < \delta.$$

В итоге имеем

$$\big|\|y'_+\|_{L^q} - \|g'_+\|_{L^q}\big| \leqslant \|y'_+ - g'_+\|_{L^q} < \delta.$$

Положим

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} g'(t)\,dt + y(-\pi), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Отметим, что $g(\pi) = g(-\pi)$, так как среднее значение функции g' на отрезке $[-\pi, \pi]$ равно нулю. Используя представление $y(x) = \int_{-\pi}^{x} y'(t)\,dt + y(-\pi)$ и неравенство

$$\|y' - g'\|_{L^1} \leqslant \|y' - y'_N\|_{L^1} + \|y'_N - g'\|_{L^1} \leqslant \delta + \|y'_N - g'\|_{L^q} < 2\delta,$$

получаем для любого $x \in [-\pi, \pi]$

$$|y(x) - g(x)| = \left|\int_{-\pi}^{x} (y'(t) - g'(t))\,dt\right| \leqslant \int_{-\pi}^{x} |y'(t) - g'(t)|\,dt \leqslant \|y' - g'\|_{L^1} < 2\delta.$$

Таким образом,

$$\|y - g\|_{L^p} < 2\delta.$$

Положим $P(x) = g(x) - \frac{M+m}{2}$, где

$$m = \min_{x \in [-\pi, \pi]} g(x) = g(x_1), \quad M = \max_{x \in [-\pi, \pi]} g(x) = g(x_2).$$

Нетрудно видеть, что $P(\pi) = P(-\pi)$. Пусть

$$m' = \min_{x \in [-\pi, \pi]} y = y(x'_1), \quad M' = \max_{x \in [-\pi, \pi]} y = y(x'_2) = -m'.$$

Имеем

$$m' - 2\delta \leqslant y(x_1) - 2\delta < g(x_1) = m \leqslant g(x'_1) < y(x'_1) + 2\delta = m' + 2\delta,$$

$$M' - 2\delta = y(x'_2) - 2\delta < g(x'_2) \leqslant M = g(x_2) < y(x_2) + 2\delta \leqslant M' + 2\delta,$$

т. е.

$$|m' - m| < 2\delta, \quad |M' - M| < 2\delta.$$

Для многочлена P выполнено условие (1), $P' = g'$ и для любого $x \in [-\pi, \pi]$

$$|P(x) - y(x)| = \left|g(x) - \frac{M+m}{2} - y(x)\right| = \left|g(x) - \frac{M+m}{2} - y(x) + \frac{M'+m'}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |g(x) - y(x)| + \frac{1}{2}|M' - M| + \frac{1}{2}|m' - m| < 2\delta + \delta + \delta = 4\delta.$$

Следовательно,

$$||y - P||_{L^p} < 4\delta.$$

При $p \geqslant 1$ из неравенства треугольника получаем

$$|||y||_{L^p} - ||P||_{L^p}| \leqslant ||y - P||_{L^p} < 4\delta.$$

При $p \in (0,1)$ из неравенства $|a+b|^p \leqslant |a|^p + |b|^p$ следует, что

$$\left|||y||^p_{L^p} - ||P||^p_{L^p}\right| \leqslant ||y - P||^p_{L^p} < (4\delta)^p.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $f(x) = x^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}(x-1)x^{\frac{1}{p}-1}$ при $x \geqslant 1$. Так как $f'(x) = \frac{p-1}{p^2}x^{\frac{1}{p}-2}(x-1) < 0$ при $x > 1$, то функция $f(x)$ убывает, следовательно $f(x) \leqslant f(1) = 1$. Отсюда получаем неравенство

$$x^{\frac{1}{p}} - 1 \leqslant \frac{1}{p}(x-1)x^{\frac{1}{p}-1}.$$

Полагая в этом неравенстве $x = a/b > 1$ и домножая его на $b^{\frac{1}{p}}$, получим

$$a^{\frac{1}{p}} - b^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{p}(a-b)a^{\frac{1}{p}-1}.$$

Положим $a = \max\left\{||y||^p_{L^p}, ||P||^p_{L^p}\right\}$ и $b = \min\left\{||y||^p_{L^p}, ||P||^p_{L^p}\right\}$. Имеем

$$\left|||y||_{L^p} - ||P||_{L^p}\right| < \frac{a^{\frac{1}{p}-1}}{p}\left|||y||^p_{L^p} - ||P||^p_{L^p}\right| < \frac{a^{\frac{1}{p}-1}}{p}(4\delta)^p.$$

С учетом неравенства $a \leqslant ||y||^p_{L_{\infty[-\pi,\pi]}} + \delta^p$, получаем

$$\lim_{\delta\to+0} ||P||_{L^p} = ||y||_{L^p},$$

а следовательно

$$\lim_{\delta\to+0} \Phi_+(P) = \Phi_+(y).$$

Значит, для любого ε можно так подобрать δ, что

$$|\Phi_+(y) - \Phi_+(P)| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству основной теоремы.

Рассмотрим случай $p \neq 0$. Из леммы 2 следует, что при нахождении величины $K_{p,q}(Q^1_+)$ верхнюю грань функционала Φ_+ достаточно рассматривать на подмножестве функций y из Q^1_+, сужение которых на отрезок $[-\pi, \pi]$ является многочленом.

Пусть $\min\limits_{x\in[-\pi,\pi]} y(x) = y(x_1) = -M$ и $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} y(x) = y(x_2) = M$. Если максимум (минимум) достигается в нескольких точках, то выбираем любую из них. Без ограничения общности (в силу периодичности функции) можем считать, что $x_1 < x_2$.

Рассмотрим функцию

$$y_1(x) = \begin{cases} -M, & x \in [-\pi, x_1]; \\ y(x), & x \in [x_1, x_2]; \\ M, & x \in [x_2, \pi]. \end{cases}$$

Для функции y_1 выполнено условие (1), причем

$$||y||_{L^p} \leqslant ||y_1||_{L^p}, \quad ||y'_+||_{L^q} \geqslant ||(y'_1)_+||_{L^q},$$

а значит $\Phi_+(y) \leqslant \Phi_+(y_1)$. Функция y имеет конечное число промежутков убывания на отрезке $[-\pi, \pi]$. Построенная функция y_1 имеет по крайней мере на один промежуток убывания меньше.

Если функция y_1 не является неубывающей на $[-\pi, \pi]$, то на интервале (x_1, x_2) найдется точка a локального максимума функции $|y_1(x)|$. Предположим, что $y_1(a) > 0$. Так как $y_1(a) \leqslant y_1(x_2) = M$, то на $(a, x_2]$ найдется точка b такая, что $y_1(b) = y_1(a)$, причем $|y_1(x)| \leqslant |y_1(a)|$ на интервале (a, b). В случае если $y_1(a) < 0$, то такая точка b найдется на $[x_1, a)$. Тогда функция y_2, определенная как

$$y_2(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \notin (a, b); \\ y_1(a), & x \in (a, b), \end{cases}$$

является непрерывной, обладает свойством (1), причем нетрудно получить неравенство $\Phi_+(y_1) \leqslant \Phi_+(y_2)$.

Повторяя при необходимости этот процесс, за конечное число шагов (так как исходная функция имеет конечное число точек экстремума) получим неубывающую на отрезке $[-\pi, \pi]$ функцию $\widetilde{y} \in V$, для которой $\Phi_+(\widetilde{y}) \geqslant \Phi_+(y)$.

Учитывая равенство $K_{p,q}(V) = 2K_{p,q}(Q^1)$, доказанное в теореме 2, получаем при $p \neq 0, 1 \leqslant q \leqslant \infty$

$$K_{p,q}(Q^1_+) \leqslant 2K_{p,q}(Q^1). \tag{11}$$

Перейдя в неравенстве (11) к пределу при $p \to +0$, получим аналогичное неравенство и в случае $p = 0$.

Докажем теперь, что аналогичное неравенство выполняется и для константы $K_{p,q}(Q^2_+)$.

Без ограничения общности (в силу периодичности) можем считать, что для функции $y \in Q^2_+$ справедливо $y(-\pi) = y(\pi) = 0$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} y(2x-\pi), & x \in [0,\pi]; \\ -y(-2x-\pi), & x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

Функция $g(x)$ нечетна, следовательно удовлетворяет условию (1) и принадлежит классу Q^1_+. Значит, для функции g выполняется неравенство (8) на классе Q^1_+, из которого, в силу равенств $||g||_{L^p} = ||y||_{L^p}$, $||g'_+||_{L^q} = 2||y'_+||_{L^q}$, получаем

$$||y||_{L^p} \leqslant 2K_{p,q}(Q^1_+)||y'_+||_{L^q}.$$

А значит, верно неравенство

$$K_{p,q}(Q^2_+) \leqslant 2K_{p,q}(Q^1_+) = 4K_{p,q}(Q^1) = 2K_{p,q}(Q^2).$$

С учетом неравенства (10), доказанного в лемме 1, доказательство теоремы 1 завершено.

Докажем, что в неравенстве (8) экстремальной функции, принадлежащей классу Q^1_+, не существует. Предположим обратное: допустим $Y \in Q^1_+$ есть экстремальная функция и

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} Y(x) = Y(x_M) = M, \qquad \min_{x\in[-\pi,\pi]} Y(x) = Y(x_m) = -M.$$

В силу периодичности функции можем считать, что $Y(\pi) = Y(-\pi) = 0$ и $-\pi < x_m < x_M < \pi$.

Рассмотрим случай $0 \leqslant p < \infty$. Нетрудно проверить, что для функции $\overline{Y}$, определенной на отрезке $[-\pi, \pi]$ по формуле

$$\overline{Y}(x) = \begin{cases} Y(x), & x \in [-\pi, x_M]; \\ M, & x \in [x_M, \pi], \end{cases}$$

выполняются неравенства $\|Y\|_{L^p} < \|\overline{Y}\|_{L^p}, \quad \|Y'_+\|_{L^q} \geqslant \|\overline{Y}'_+\|_{L^q}$.

Рассмотрим последовательность функций

$$\overline{Y}_n(x) = \begin{cases} \overline{Y}(x), & x \notin [x_M, \pi - 1/n], \\ nM(\pi - x), & x \in [\pi - 1/n, \pi], \end{cases}$$

при n таких, что $\pi - 1/n > x_M$. Нетрудно проверить, что

$$\|\overline{Y}\|_{L^p}^p - \|\overline{Y}_n\|_{L^p}^p = \frac{M^p}{2n\pi}\left(1 - \frac{1}{p+1}\right), \quad p \neq 0;$$

$$\ln \|\overline{Y}\|_{L^0} - \ln \|\overline{Y}_n\|_{L^0} = \frac{1}{2n\pi}.$$

Отсюда получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|\overline{Y}_n\|_{L^p} = \|\overline{Y}\|_{L^p}$, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N и функция $\overline{Y}_N \in Q^1_+$, для которой

$$\|\overline{Y}\|_{L^p} - \|\overline{Y}_N\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $\varepsilon = \|\overline{Y}\|_{L^p} - \|Y\|_{L^p}$. Тогда получим $\|\overline{Y}_N\|_{L^p} > \|Y\|_{L^p}$, кроме того, $\|(\overline{Y}'_N)_+\| = \|\overline{Y}'_+\|$, значит, $\Phi_+(\overline{Y}_N) > \Phi_+(Y)$, т. е. функция Y не экстремальная.

Рассмотрим теперь случай $p = \infty$ и $q \neq 1$. Пусть $0 < \varepsilon < \pi - x_M$, $\lambda = \frac{\pi + x_M}{2\pi - \varepsilon} < 1$. Для принадлежащей классу Q^1_+ функции $\widetilde{Y}$, определенной на отрезке $[-\pi, \pi]$ по формуле

$$\widetilde{Y}(x) = \begin{cases} Y(\lambda(x+\pi) - \pi), & x \in [-\pi, \pi - \varepsilon], \\ \frac{M}{\varepsilon}(\pi - x), & x \in [\pi - \varepsilon, \pi], \end{cases}$$

справедливы неравенства

$$\|\widetilde{Y}'_+\|_{L^\infty} \leqslant \lambda \|Y'_+\|_{L^\infty} < \|Y'_+\|_{L^\infty};$$

$$\|\widetilde{Y}'_+\|_{L^q} = \lambda^{1-1/q}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x_M} |Y'_+(t)|^q\, dt\right)^{1/q} \leqslant \lambda^{1-1/q}\|Y'_+\|_{L^q} < \|Y'_+\|_{L^q}.$$

Так как при этом $\|\widetilde{Y}\|_{L^\infty} = \|Y\|_{L^\infty}$, то $\Phi_+(Y) < \Phi_+(\widetilde{Y})$, т. е. функция Y не экстремальная.

В случае $q = 1$ из периодичности функции Y следует, что

$$0 = Y(\pi) - Y(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} Y'(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} (Y'_+(x) + Y'_-(x))dx.$$

Тогда
$$\int_{-\pi}^{\pi} |Y'(x)|dx = 2\int_{-\pi}^{\pi} Y'_+(x)dx$$
и, следовательно, $\Phi_+(Y) = 2\Phi(Y)$. Так как экстремальной функции в неравенстве (3) при $q = 1$ не существует, то экстремальной функции в неравенстве (8) при $q = 1$ также не существует. Действительно,
$$\Phi_+(Y) = 2\Phi(Y) < 2K_{p,1}(Q^1) = K_{p,1}(Q^1_+).$$

Покажем, что экстремальной функции в неравенстве (8) на классе Q^2_+ также не существует. Предположим, что $Y \in Q^2_+$ – экстремальная. Без ограничения общности (в силу периодичности функции) можем считать, что $Y(0) = 0$. Функция $\widehat{Y}$, определенная на отрезке $[-\pi, \pi]$ по формуле
$$\widehat{Y}(x) = \begin{cases} -Y(-2x), & x \in [-\pi, 0], \\ Y(2x), & x \in [0, \pi], \end{cases}$$
принадлежит классу Q^1_+, причем $\Phi_+(Y) = 2\Phi(\widehat{Y})$. Так как на классе Q^1_+ не существует экстремальной функции, то
$$\Phi_+(Y) = 2\Phi_+(\widehat{Y}) < 2K_{p,q}(Q^1_+) = K_{p,q}(Q^2_+),$$
т. е. функция Y не является экстремальной.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора В. В. Арестова за постановку задачи и внимание к работе, а также Е. Е. Бердышеву и Р. Р. Акопяна за ряд ценных замечаний к статье и постоянную помощь в исследованиях.

Литература

1. Schmidt E. Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potenz einer Funktion und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet // Math. Ann. 1940. Bd. 117, № 3. S. 301–326.

2. Харди Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948.